EXERCICE 31

$\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\alpha > 1$

1) $f(x) = x^{-\alpha}$; $D_f =]0, \infty[$

$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$; $n \geq 1$

$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ car f est décroissante

$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx$

$\Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$

$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$

3) – a)

* $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n f(x)dx$

$\Rightarrow S_n - \frac{1}{k} \leq \int_1^n f(x)dx$

$\Rightarrow \boxed{S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx}$ (1)

* $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx$

b) * $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(k+1)^\alpha} \geq 0$

d'où S_n est croissante

* $S_n \leq S_1 + \int_1^n f(x)dx$

$\int_1^n f(x)dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}]$

$\int_1^n f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où $S_n \leq S_1 + \frac{1}{\alpha-1}$

$\Rightarrow S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où S_n est majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$

c) (S_n) est croissante et majorée elle est donc convergente

$0 \leq S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ d'où $0 \leq \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

d) on a

$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f(x)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\int_1^n f(x)\,dx = [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}[1 - n^{1-\alpha}]$

et $\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha-1}[1 - (n+1)^{1-\alpha}]$

et comme on a $\int_1^n f(x)\,dx \leq \frac{1}{\alpha-1}$ d'où

$\frac{1}{\alpha-1}[1 - (n+1)^{1-\alpha}] \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0 \quad \alpha > 1$

D'où $\frac{1}{\alpha-1} \leq lim\, S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$

$\frac{\alpha}{\alpha-1} = 2008 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2008}{2007}$ et dans ce cas

$\frac{1}{\alpha-1} = 2007$

D'où pour $\alpha = \frac{2008}{2007}$ on aura :

$2007 \leq \text{Lim } S_n \leq 2008$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn